

Wiesław GRZESIKIEWICZ¹
Artur ZBICIAK²

METODA TŁUMIENIA DRGAŃ POJAZDU ZA POMOCĄ INERTERA

Inerterem jest urządzeniem, którego zasada działania jest zbliżona do tłumika dynamicznego. Coraz częściej rozważa się możliwości zastosowania inertera w zawieszeniu pojazdu w celu ograniczenia drgań, ustabilizowania nacisku kół na drogę lub do poprawy stateczności ruchu pojazdu. W pracy rozpatrzono prosty układ mechaniczny z inerterem, służący do modelowania jednowymiarowych drgań pojazdu. Rozważania skoncentrowano na analizie przebiegu nacisku koła na drogę. Przedstawiono wyniki obliczeń komputerowych, z których wynika, że amplituda zmian nacisku koła zmniejszy się, jeśli w układzie zostanie zastosowany inerter.

A METHOD OF VEHICLE'S VIBRATION REDUCTION EMPLOYING INERTER

An inerter is a mechanical device operating similarly as dynamic absorber. The possibility of inerter's employing within the vehicle's suspension is taken into consideration more and more frequently. It can reduce the vibrations, stabilize the tire pressure on pavement and improve the stability of motion. A simple mechanical system equipped with inerter suited for one-dimensional vibration analysis was presented in the paper. The focus was on the analysis of the wheel load on road. The results of computer simulations demonstrated that using the inerter one can reduce considerably the amplitude of the wheel load.

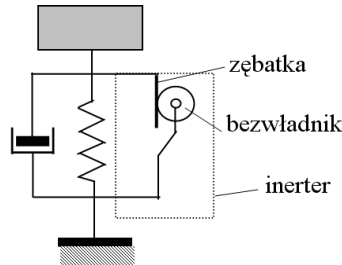
1. WPROWADZENIE

W celu ograniczenia drgań pojazdu są stosowane różnego rodzaju urządzenia rozpraszające energię. Najczęściej są to tłumiki wiskotyczne lub cierne, a czasami – jak na przykład w samochodzie Citroën 2CV – tłumiki dynamiczne.

W niniejszej pracy zajmiemy się urządzeniem nazywanym inerterem, którego zasada działania jest zbliżona do tłumika dynamicznego. Schemat prostego układu z inerterem pokazano na rys. 1. Przedstawiony tam obiekt składa się z listwy zębatej, po której przetacza się koło bezwładnika. Tak dołączone urządzenie zwiększa inercję układu. Inne rozwiązania konstrukcyjne inertera opisano w pracy [4].

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych; 02-524 Warszawa; ul. Narbutta 84.
Tel: +48 22 234-87-78, Fax: +48 22 849-03-03, E-mail: wgr@simr.pw.edu.pl

² Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej; 00-637 Warszawa; Al. Armii Ludowej 16.
Tel: +48 22 234-63-49, Fax: +48 22 825-89-46, E-mail: a.zbiciak@il.pw.edu.pl



Rys.1. Schemat prostego układu mechanicznego z inerterem.

Coraz częściej rozważa się możliwości zastosowania inertera w zawieszeniu pojazdu w celu ograniczenia drgań, ustabilizowania nacisku kół na drogę lub do poprawy stateczności ruchu pojazdu [1, 2, 3].

Pionierem badań nad wpływem inertera na dynamikę samochodu jest prof. Malcolm C. Smith z Uniwersytetu w Cambridge. W niniejszej pracy będziemy korzystali z wyników badań M.C. Smitha, zamieszczonych w pracach [1] i [2]. Zajmiemy się analizą stosunkowo prostego układu mechanicznego zawierającego inerter. Układ ten będzie służył do modelowania jednowymiarowych drgań pojazdu. Rozważania skoncentrujemy na analizie przebiegu nacisku koła na drogę.

2. OPIS MODELU POJAZDU

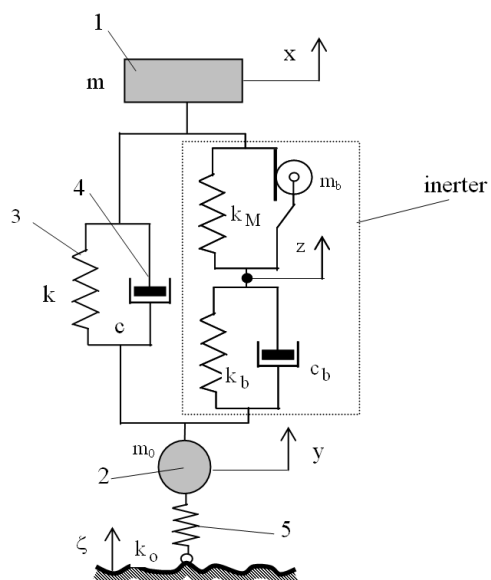
Układ mechaniczny, który przyjęto do analizy drgań pojazdu, pokazano na rys. 2. W układzie tym znajdują się:

- ciało 1 o masie m odwzorowujące bezwładność nadwozia;
- ciało 2 o masie m_o odwzorowujące bezwładność koła i elementów zawieszenia pojazdu;
- element sprężysty 3 o sztywności k odwzorowujący sprężystość zawieszenia;
- element dyssypacyjny 4, charakteryzowany stałą c , będący modelem urządzeń rozpraszających energię;
- element sprężysty 5 o sztywności k_o , odwzorowujący odkształcenia opony;
- struktura reologiczna inertera zaproponowana w pracach [1] i [2], charakteryzowana parametrami m_b , k_M , k_b i c_b .

Na schemacie modelu zaznaczono współrzędne x , y , z , za pomocą których będziemy opisywać ruch modelu; a także współrzędną ζ opisującą nierówność drogi.

Przedstawiona struktura reologiczna inertera może być rozpatrywana w sześciu wariantach: 1) wszystkie parametry mają wartości dodatnie, 2) $k_M = 0$, 3) $k_b = 0$, 4) $c_b = 0$, 5) $k_M = 0$ i $k_b = 0$, 6) $k_M = 0$ i $c_b = 0$.

Wszystkie charakterystyki elementów rozpatrywanego modelu są liniowe oraz zakładamy, że w czasie drgań koła nie odrywają się od drogi.



Rys.2. Schemat układu mechanicznego z inerterem, służącego do modelowania drgań pojazdu.

3. RÓWNANIA OPISUJĄCE DRGANIA UKŁADU

Rozpatrujemy drgania wymuszone układu z rys. 2, wzbudzone nierównością podłoża. Równania drgań analizowanego układu mają postać

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

gdzie: \mathbf{X} - wektor współrzędnych,

\mathbf{F} - wektor siły,

\mathbf{M} - macierz bezwładności,

\mathbf{C} - macierz dyssypacji,

\mathbf{K} - macierz sztywności.

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ k_0 \zeta(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2a)$$

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} -m + m_b & 0 & -m_b \\ 0 & m_0 & 0 \\ -m_b & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & c + c_b & -c_b \\ 0 & -c_b & c_b \end{bmatrix}; \quad (2b)$$

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} k + k_M & -k & -k_M \\ -k & k + k_o + k_b & -k_b \\ -k_M & -k_b & k_M + k_b \end{bmatrix} \quad (2c)$$

Należy zaznaczyć, że współrzędne x , y , z opisują przemieszczenia stosownych punktów układu od położenia, w którym pojazd znajduje się w położeniu równowagi. W tej konfiguracji siły grawitacyjne równoważą się z siłami sprężystości. Ponieważ rozpatrywany układ jest liniowy, to w równaniach ruchu opisywanych powyższymi współrzędnymi nie ma składników związanych z grawitacją [5].

Niech funkcja ξ opisuje nierówności podłoża w zależności od długości drogi s . Zakładamy, że prędkość pojazdu jest stała i wynosi v ; wtedy długość drogi i funkcja wymuszająca ς mają postać

$$s = vt, \quad \varsigma(t) := \xi(vt). \quad (3a)$$

Jeżeli nierówność podłoża jest opisana funkcją harmoniczną

$$\xi(s) := \xi_o \sin \frac{2\pi}{L} s \quad (3b)$$

gdzie: ξ_o - amplituda nierówności,
 L - długość fali nierówności,

wtedy funkcja ς ma postać

$$\varsigma(t) = \xi_o \sin \left(\frac{2\pi}{L} vt \right) = \xi_o \sin(\omega t) = \xi_o \sin(2\pi f t) \quad (4)$$

gdzie: ω - częstość [rad/s],
 $f = v/L$ - częstotliwość [Hz].

3. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA DRGAŃ

Rozwiązanie liniowego równania drgań (1), wzbudzanych wymuszeniem harmonicznym może być rozłożone na trzy składniki [5]. Dwa pierwsze wyznaczają proces przejściowy, czyli zanikające drgania swobodne wywołane warunkami początkowymi i wymuszeniem, natomiast trzeci składnik wyznacza proces ustalony, czyli drgania harmoniczne o częstości równej częstości wymuszenia.

Bardzo często analizuje się tylko trzecią część rozwiązania, czyli drgania ustalone, które opisuje funkcja harmoniczna o tej samej częstości co wymuszenie lecz przesunięta w fazie. W tym celu rozpatruje się zespoloną postać równania (1). Wektory współrzędnych i wymuszenia mają w takim przypadku postać

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_0 e^{i\omega t}, \quad \bar{\mathbf{X}}_0 := \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_0 e^{i\omega t}, \quad \bar{\mathbf{F}}_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ k_0 \xi_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

gdzie kreska nad zmienną oznacza, że jest to wektor liczb zespolonych, czyli $\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{F}} \in Z$, a i jest jedynką urojoną.

Przy tak określonych zmiennych, zespolona postać równania (1) jest następująca

$$\bar{\Pi}(\omega) \bar{\mathbf{X}}_0 = \bar{\mathbf{F}}_0, \quad (6)$$

jeśli $\bar{\Pi} \in Z^{N \times N}$ jest nazywana zespoloną macierzą sztywności

$$\bar{\Pi}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) + i\omega \mathbf{C}. \quad (7)$$

Rozwiązanie równania (6) ma postać

$$\bar{\mathbf{X}}_0 = (\bar{\Pi}(\omega))^{-1} \bar{\mathbf{F}}_0. \quad (8)$$

Dalej będziemy rozpatrywać wyrażenie, które wyznacza siłę nacisku koła na podłoże wg następującej zależności

$$N := k_0 (\zeta - y); \quad (9a)$$

a podczas drgań ustalonych mamy

$$\bar{N} := k_0 (\xi_0 - \bar{y}_0) e^{i\omega t}. \quad (9b)$$

Zmienną $\bar{y}_0 \in Z^1$ obliczamy na podstawie rozwiązania równania (8), i opisujemy wzorem

$$\bar{y}_0 = R(\omega) + iU(\omega). \quad (10)$$

Ostatecznie wzór określający siłę nacisku ma postać

$$\bar{N} = k_0 [\xi_0 - R(\omega) - iU(\omega)] e^{i\omega t}, \quad (11a)$$

albo po przekształceniu

$$\bar{N} = k_0 A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (11b)$$

gdzie

$$A(\omega) = \sqrt{(R(\omega) - \xi_0)^2 + U^2(\omega)}, \quad \varphi = \arctg \frac{U(\omega)}{R(\omega) - \xi_0}. \quad (11c)$$

Wyrażenia A i φ określają amplitudową i fazową charakterystykę częstotliwościową siły nacisku. W przypadku nierówności drogi opisanej we wzorze (4), funkcję opisującą nacisk koła w czasie drgań ustalonych wyznaczamy ze wzorów (11)

$$N(t) := \text{Im } \bar{N} = k_o A(\omega) \sin(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Bardzo istotną dynamiczną charakterystyką układu mechanicznego jest zestaw częstości drgań swobodnych ω_{oi} , $i = 1 \dots N$. Wartości tych częstości obliczamy na podstawie wartości własnych λ_i , $i = 1 \dots N$, macierzy $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, określonych równaniem

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (13)$$

Należy dodać, że dla rozważanych tu macierzy, wartości własne $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ są liczbami dodatnimi, a częstości drgań własnych wynoszą

$$\omega_{oi} := \sqrt{\lambda_i} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right], \quad \omega_{oi} := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} [\text{Hz}]. \quad (14)$$

4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

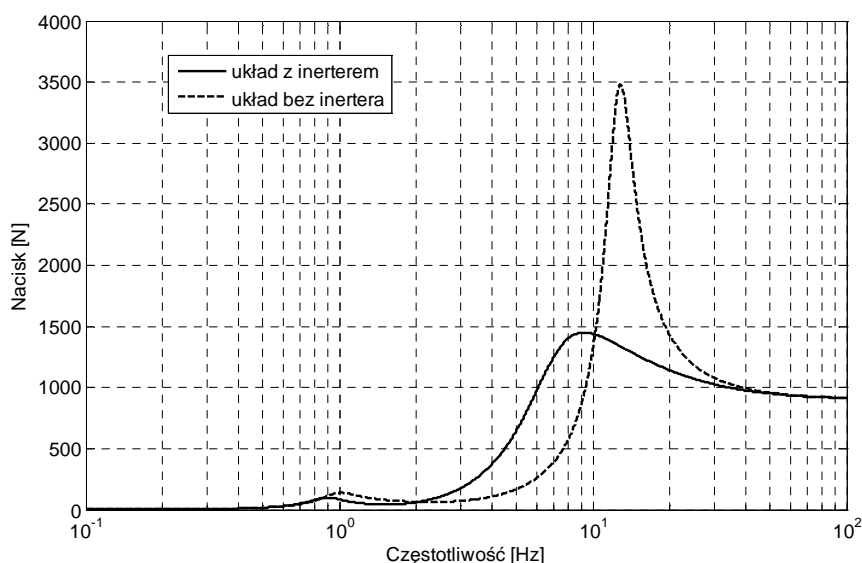
Rozpatrujemy porównanie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej siły nacisku koła $N(\omega)$ dla układu bez inertera oraz z inerterem. Obliczenia wykonamy przy następujących danych pojazdu: $m = 400 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ kN/m}$, $c = 1012 \text{ Ns/m}$, $m_o = 50 \text{ kg}$, $k_o = 300 \text{ kN/m}$, oraz dla inertera określonego parametrami: $k_M = 0$, $m_b = 100 \text{ kg}$, $k_b = 4k$, $c_b = 4c$. Przyjmujemy, że nierównością drogi jest określona funkcja $\xi(x) = \xi_o \sin(2\pi x/L)$, gdzie $\xi_o = 0,003 \text{ m}$, $L = 0,75 \text{ m}$, a stąd mamy funkcję wymuszającą drgania $\zeta(t) = \xi_o \sin(\omega t)$, gdzie $\omega = 2\pi v/L$. Przyjmujemy przedział prędkości jazdy $v \in [0, 270] \text{ km/h}$, a wynikający stąd przedział częstości wymuszenia wynosi $\omega \in [0, 100] \text{ Hz} = [0, 628] \text{ rad/s}$.

Obliczony nacisk statyczny wynosi $N_{st} = (m + m_o)g \cong 4415 \text{ N}$. Częstości drgań układ bez inertera i z inerterem zestawiono w tab. 1.

Tab. 1. Częstości drgań

Nr	Częstotliwość [Hz]	
	Układ bez inertera	Układ z inerterem
1	0,98	0,88
2	12,65	4,04
3	-	14,02

Wpływ inertera na charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową ilustrują wykresy zamieszczone na rys. 3. Z porównania tych wykresów wynika, że amplituda zmian nacisku koła jest mniejsza w układzie z inerterem. Dzięki temu zwiększa się stopień wykorzystania przyczepności pojazdu, wpływający na siłę napędu i hamowanie, a także na bezpieczeństwo pojazdu.



Rys.3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa układu z inerterem i bez inertera.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono prosty model pojazdu wyposażonego w inerter. Pokazano, że dzięki zastosowaniu inertera można ustabilizować nacisk koła na drogę. W dalszych rozważaniach przewidujemy optymalizację parametrów inertera, a także analizę drgań pojazdu przy użyciu adekwatniejszego modelu.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Smith M.C., Wang F.C.: *Performance Benefits in Passive Vehicle Suspensions Employing Inerters*, Vehicle System Dynamics, 2004(42), 4, 235-257.
- [2] Smith M.C.: *The Inerter Concept and its Application*, SICE Annual Conf., Fukui, Japan, 4th August 2003.
- [3] Wang F.C., Liao M.K.: *The lateral stability of train suspension systems employing inerters*, Vehicle System Dynamics, 2010(48), 5, 619-643.
- [4] *Вибрации в механике*, no. 6, Москва, Машиностроение, 1981.
- [5] Grzesikiewicz W., Osiecki J., Piotrowski J.: *Podstawy dynamiki pojazdów szynowych*, WPW, Warszawa 1974.